

# Systemes de classes parcimonieux, treillis demantelables et graphes triangules.

Alain Gély

LITA, Université Paul Verlaine, Metz  
[gely@univ-metz.fr](mailto:gely@univ-metz.fr)

François Brucker, Centrale Marseille  
[francois.brucker@centrale-marseille.fr](mailto:francois.brucker@centrale-marseille.fr)

*Séminaire Mathématique Discrète, Optimisation et Décision  
Maison des Sciences Économiques  
106/112 Boulevard de l'Hôpital - Paris*

- 1) Définitions & introduction des systèmes de classes parcimonieux
- 2) Systèmes de classes parcimonieux et classes de treillis
- 3) Systèmes de classes parcimonieux et classes de graphes

# 1) Définitions & introduction des systèmes de classes parcimonieux

## Système de classes sur X

Famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles tq  
 $\{x\} \in \mathcal{F}$  quel que soit  $x \in X$   
 $X \in \mathcal{F}$ .

$$\begin{aligned} X &= \{a,b,c,d,e\} \\ \mathcal{F} &= \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d, e, \\ abcde, \\ abc, bcd, cde \end{array} \right\} \end{aligned}$$

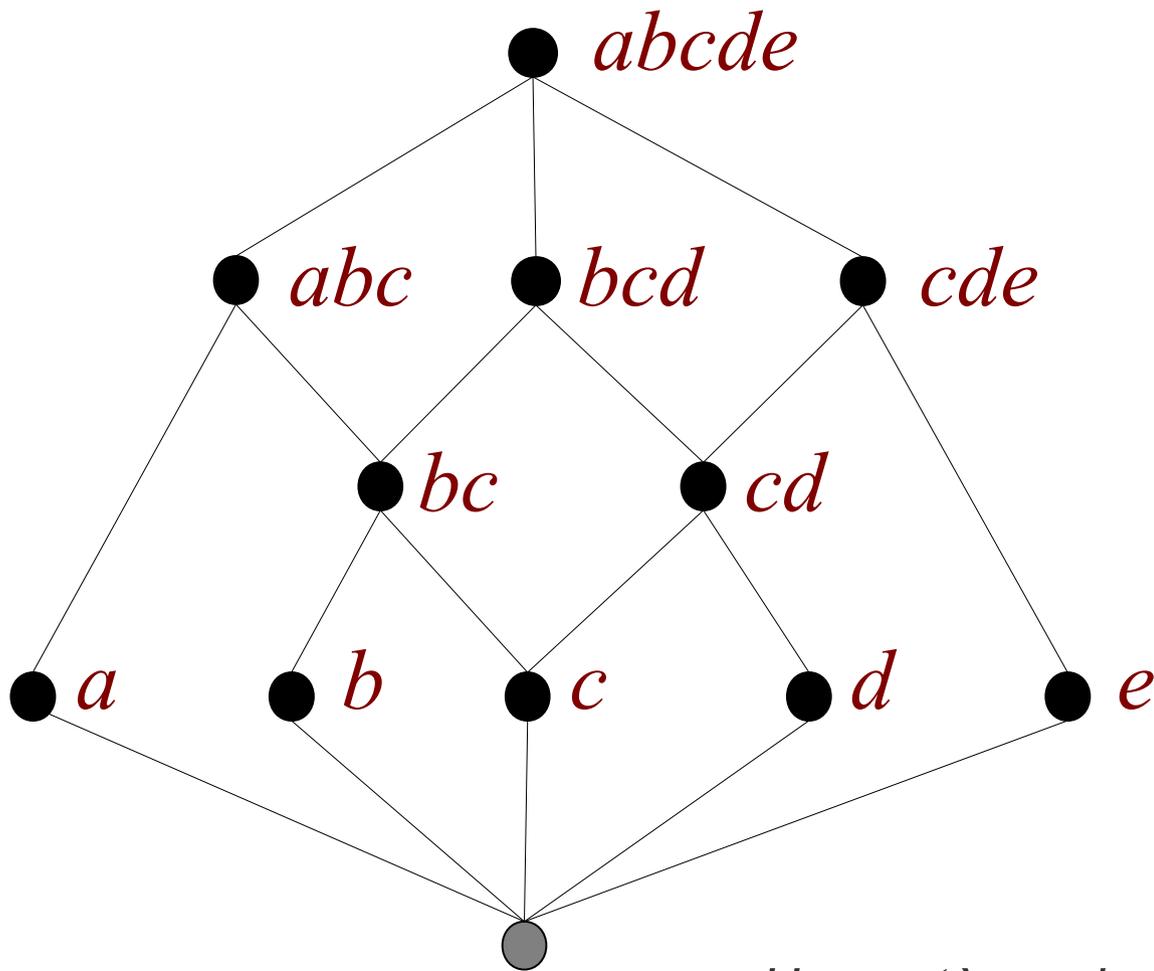
## Système de fermeture sur X

Famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles tq  
 $Y, Z \in \mathcal{F}$  implique  $Y \cap Z \in \mathcal{F}$   
 $X \in \mathcal{F}$ .

$$\begin{aligned} X &= \{a,b,c,d,e\} \\ \mathcal{F} &= \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d, e, \\ abcde, \\ abc, bcd, cde, \\ \mathbf{bc, cd} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

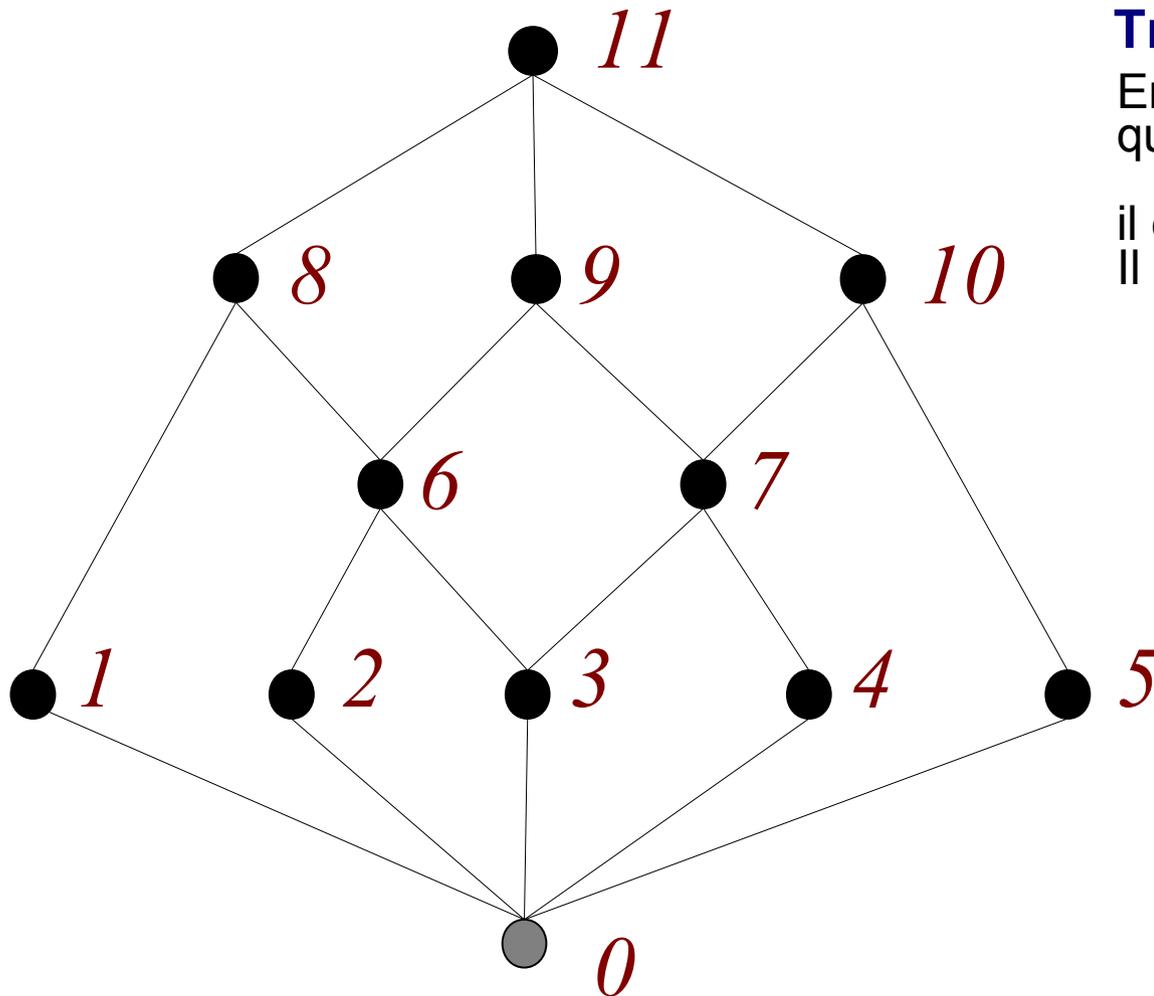
*quitte à ajouter les intersections manquantes, on peut toujours ramener un système de classes à un système de fermeture.*

$$\begin{aligned}
 X &= \{ a, b, c, d, e \} \\
 \mathcal{F} &= \{ a, b, c, d, e, bc, cd, abc, bcd, cde, abcde \}
 \end{aligned}$$



Un système de fermeture, ordonné par inclusion, est un treillis.

$$\begin{aligned}
 X &= \{ a, b, c, d, e \} \\
 \mathcal{F} &= \{ a, b, c, d, e, bc, cd, abc, bcd, cde, abcde \}
 \end{aligned}$$



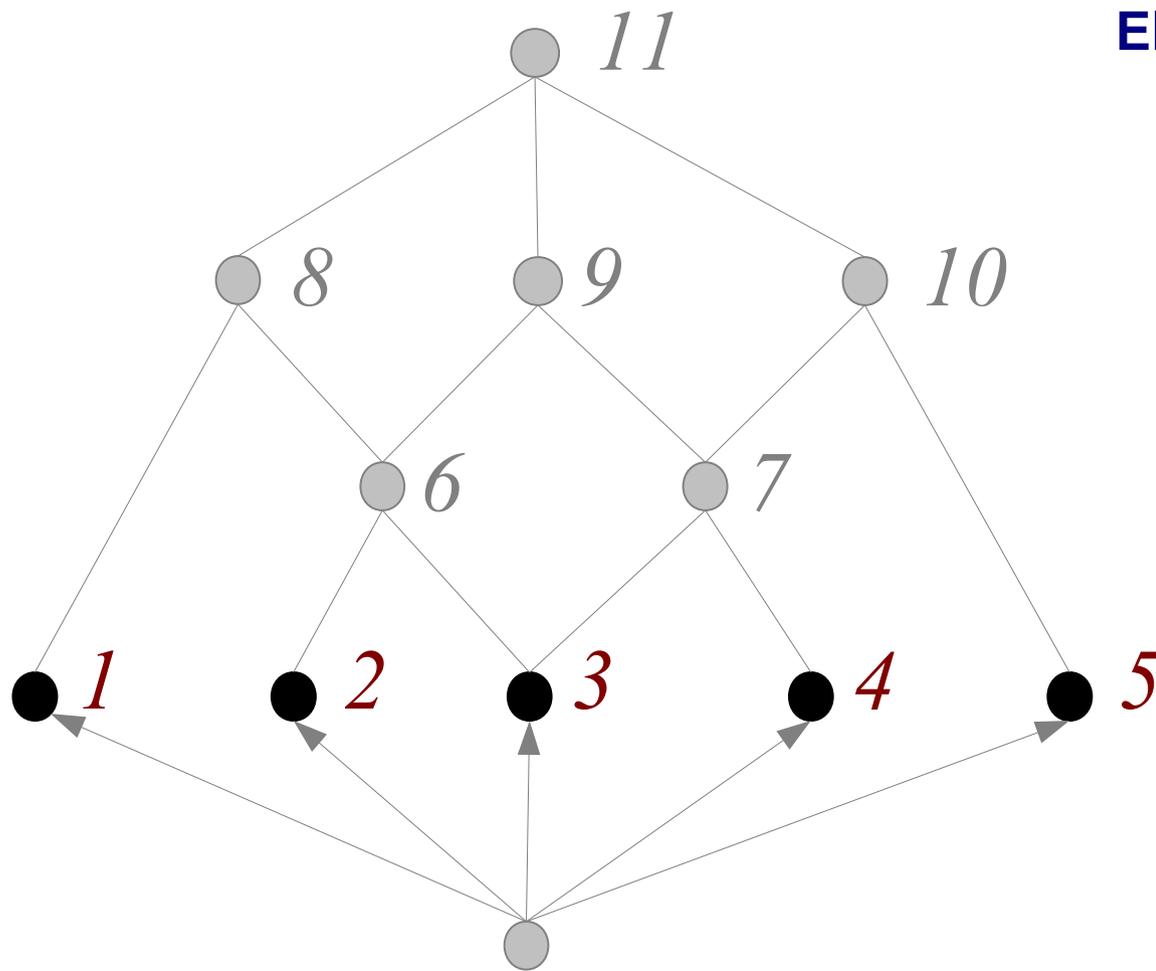
### Treillis

Ensemble ordonné  $L(P, <)$  tel que,  
quel que soit un sous ensemble  $X$  de  $P$ ,

il existe une borne supérieure à  $X$  dans  $P$   
Il existe une borne inférieure à  $X$  dans  $P$

$$\begin{aligned}
 3 \vee 5 &= 10 \\
 8 \wedge 10 &= 3
 \end{aligned}$$

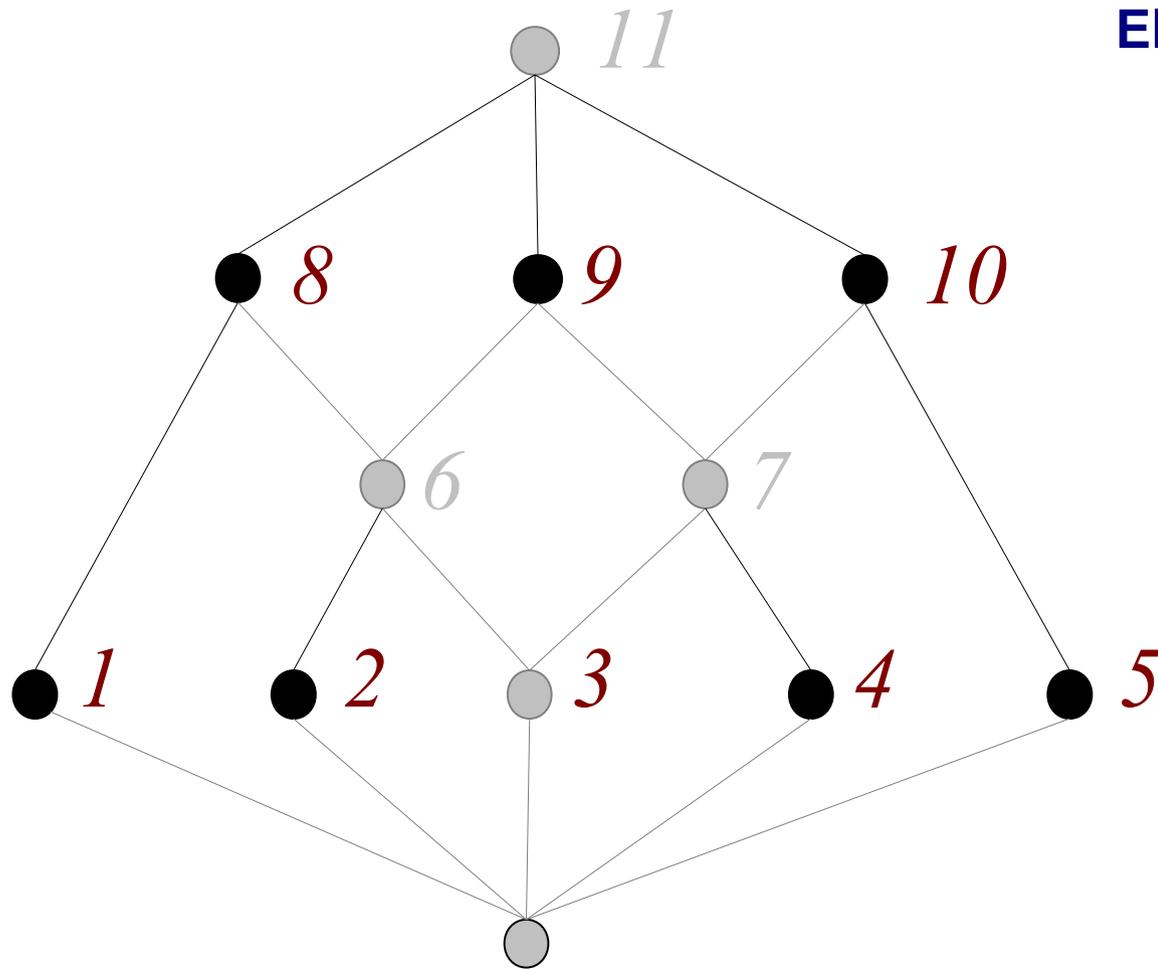
$$\begin{aligned}
 X &= \{ a, b, c, d, e \} \\
 \mathcal{F} &= \{ a, b, c, d, e, \mathbf{bc}, \mathbf{cd}, \mathbf{abc}, \mathbf{bcd}, \mathbf{cde}, \mathbf{abcde} \}
 \end{aligned}$$



## Elements particuliers

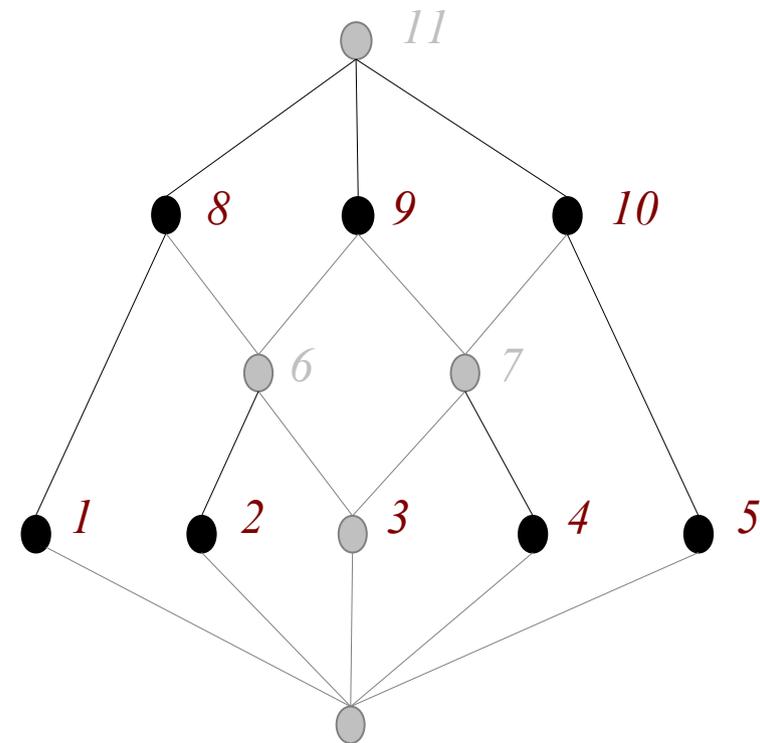
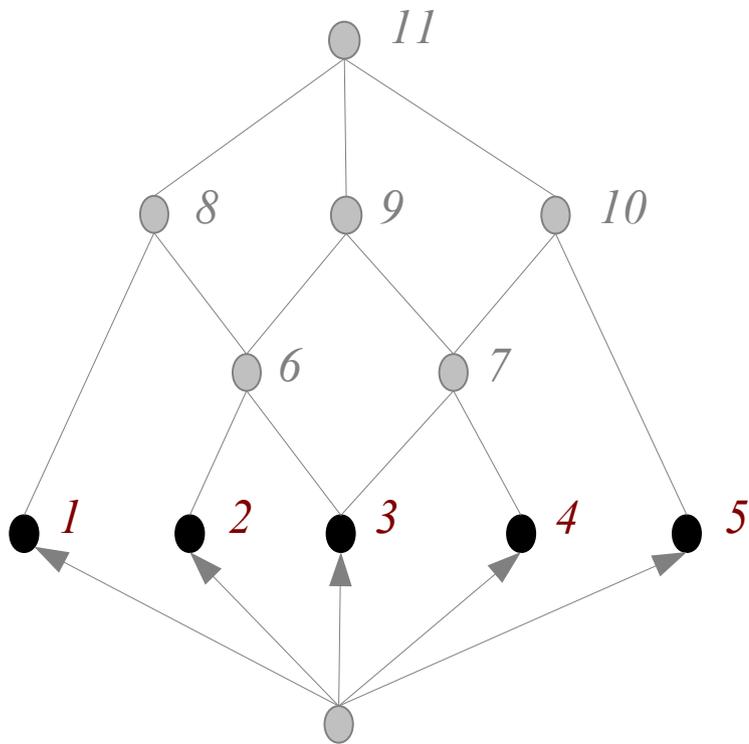
- Éléments sup-irréductibles

$$\begin{aligned}
 X &= \{ a, b, c, d, e \} \\
 \mathcal{F} &= \{ a, b, c, d, e, \mathbf{bc}, \mathbf{cd}, \mathbf{abc}, \mathbf{bcd}, \mathbf{cde}, \mathbf{abcde} \}
 \end{aligned}$$



## Elements particuliers

- Éléments inf-irréductibles



- $J(L) = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
- $M(L) = \{ 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 \}$
- $Irr(L) = J(L) \cup M(L) = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 \}$
- $D(L) = J(L) \cap M(L) = \{ 1, 2, 4, 5 \}$
- $A(L) = x \in J(L) \text{ tel que } \perp \ll x$

**sup-irréductibles**

**inf-irréductibles**

**irréductibles**

**doublement irréductibles**

**atomes**

## Système de classes sur X

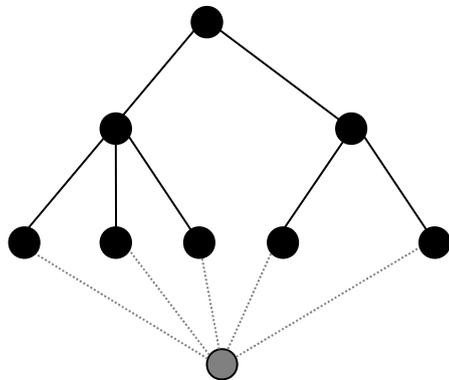
Famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles tq  
 $\{x\} \in \mathcal{F}$  quel que soit  $x \in X$   
 $X \in \mathcal{F}$ .

## Système de fermeture sur X

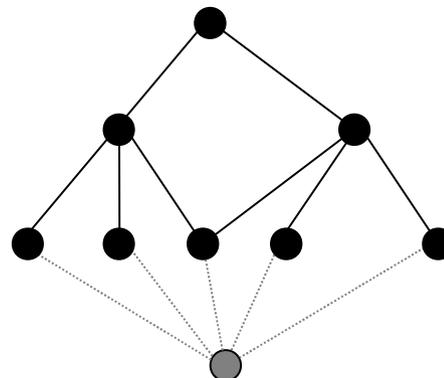
Famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles tq  
 $Y, Z \in \mathcal{F}$  implique  $Y \cap Z \in \mathcal{F}$   
 $X \in \mathcal{F}$ .

*En fonction des propriétés que l'on cherche à obtenir sur le système de classe, on aura différents types de systèmes de fermeture.*

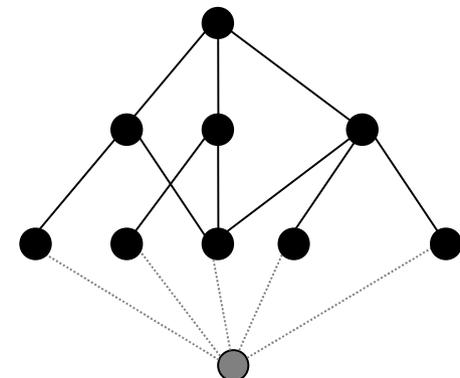
- Quasi Hiérarchies
- Pseudo Hiérarchies
- Hiérarchies
- ...



*hiérarchie*



*Pseudo-hiérarchie*



*Quasi-hiérarchie*

**quasi-hiérarchie**

*frontière indices / Cliques.  
configuration interdite : 3-couronnes*

**système de  
classes  
parcimonieux**

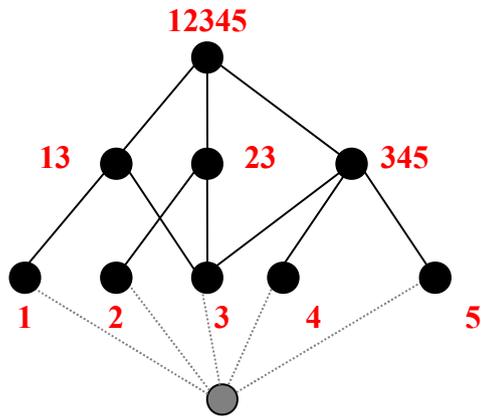
*Introduit par F. Brucker comme généralisation  
des arbres de phylogénie*

**pseudo-hiérarchie**

*Diagramme de Hasse Planaire  
(hypergraphes d'intervalles)*

**hiérarchie**

*Arbres (emboîtement des classes)*



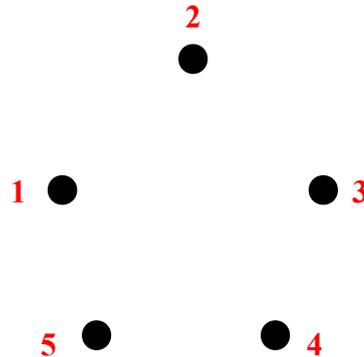
*Quasi-hiérarchie*

	1	2	3	4	5
1	0	2	1	2	2
2		0	1	2	2
3			0	1	1
4				0	1
5					0

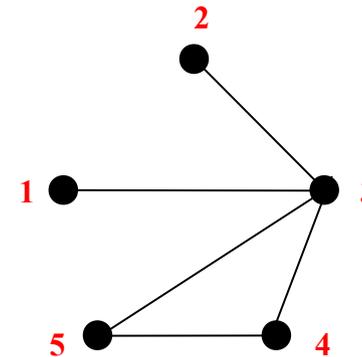
Matrice  
de dissimilarité

Les quasi-hiérarchies sont une frontière.

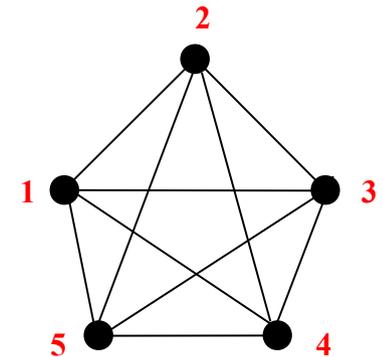
Correspondance entre **n'importe quel indice** et le système de classes, vu comme **famille de cliques maximales** de graphes seuils.



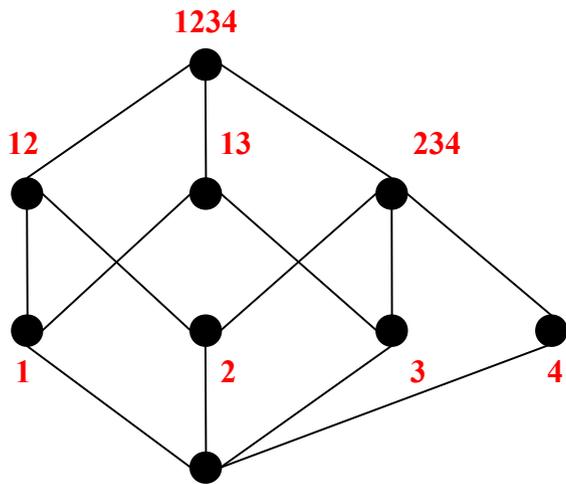
graphe seuil  
 $\leq 0$



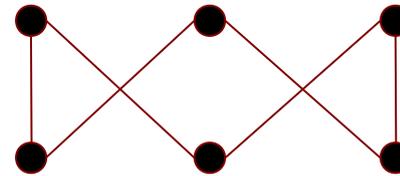
graphe seuil  
 $\leq 1$



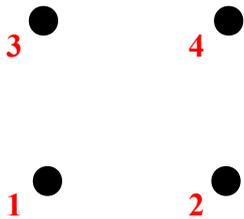
graphe seuil  
 $\leq 2$



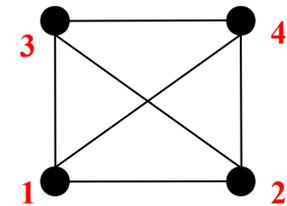
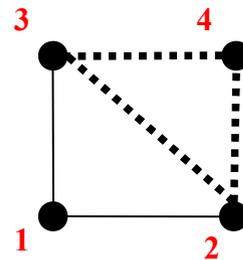
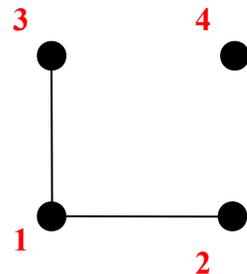
dans une **quasi-hiérarchie**, l'intersection de trois classes est égale à l'intersection de deux d'entre elles.



Couronne à 3 éléments  
*Configuration interdite*

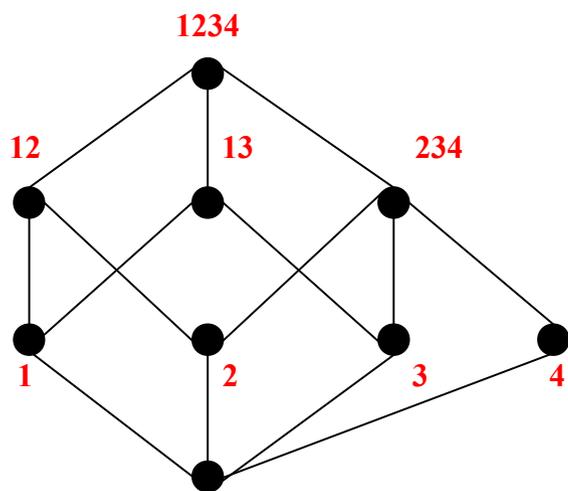


graphe seuil  
 $\leq 0$

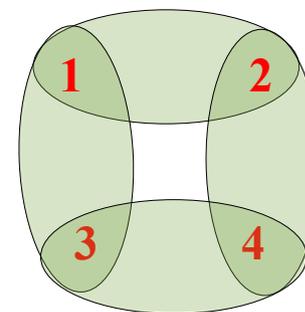
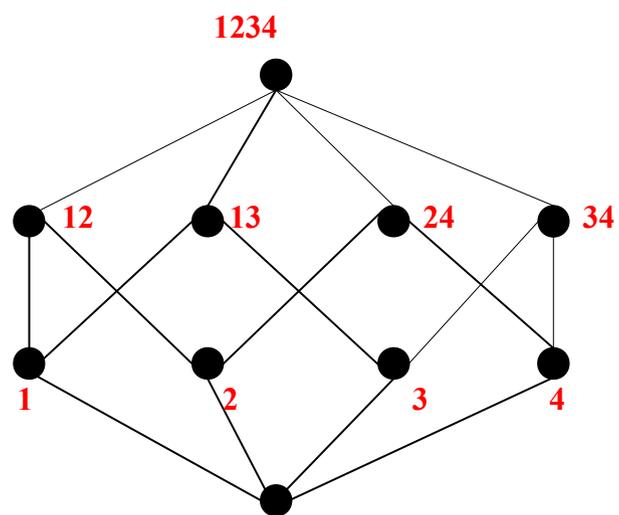
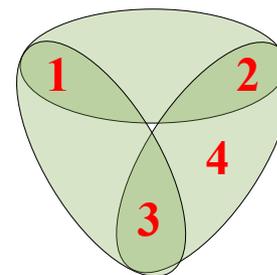


graphe seuil  
 $\leq \infty$

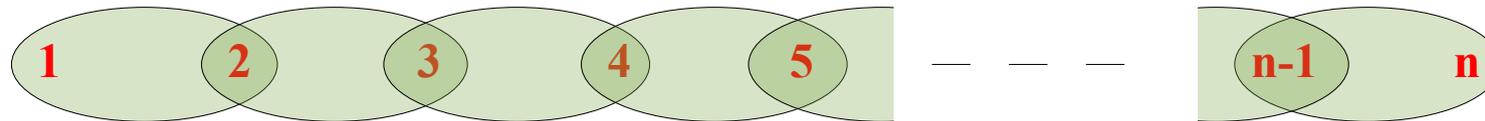
impossibilité de  
retrouver les classes



dans une **quasi-hiérarchie**, l'intersection de trois classes est égale à l'intersection de deux d'entre elles.



# Systeme de classes Parcimonieux



## Principe de parcimonie, la nature fait les choix les plus simples

Si une classe rassemble les individus 1 et 2

Si une classe rassemble les individus 2 et 3

Alors il n'y a pas de raison

qu'une classe rassemblant les individus 1 et 3 ne contienne pas 2

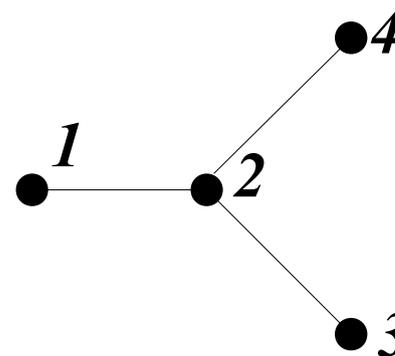
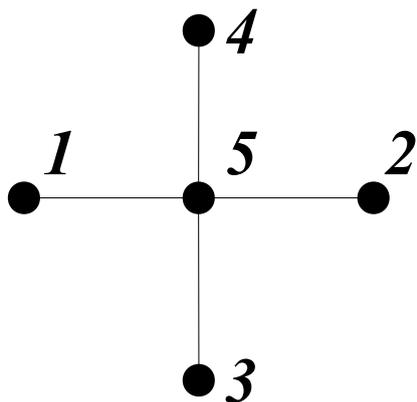
Le principe reste vrai pour  $n$  classes qui s'intersectent deux à deux

## Systeme de classes Parcimonieux

Un hyper-arbre est un hypergraphe dont les hyper-arêtes peuvent se représenter comme des chemins connexes d'un arbre.

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ E &= \{145, 125, 235, 345\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\} \\ E &= \{1, 12, 23, 3, 24, 2, 4\} \end{aligned}$$



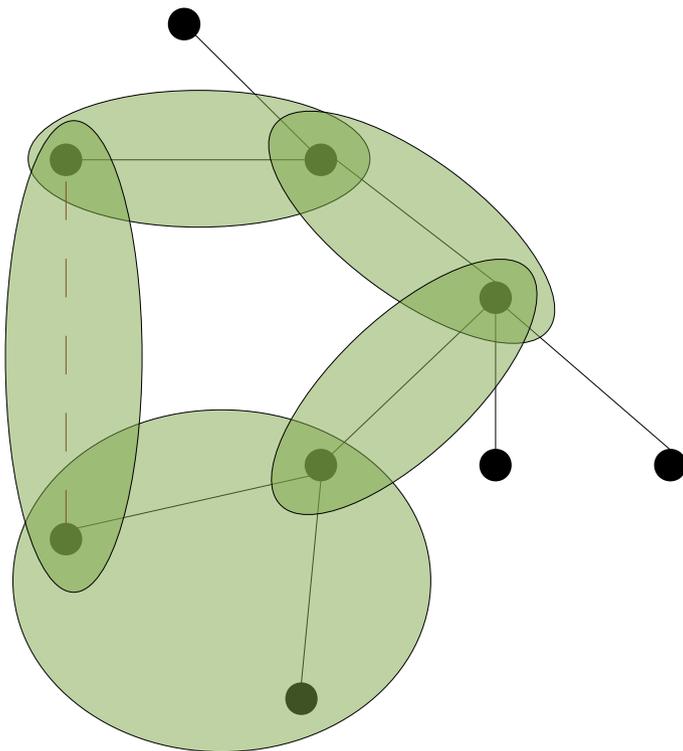
**Les Systemes de classes Parcimonieux sont des hyper-arbres**

# Système de classes Parcimonieux

Les Systèmes de classes Parcimonieux sont des hyper-arbres

## Preuve

Supposons un système de classe qui ne soit pas un hyper-arbre



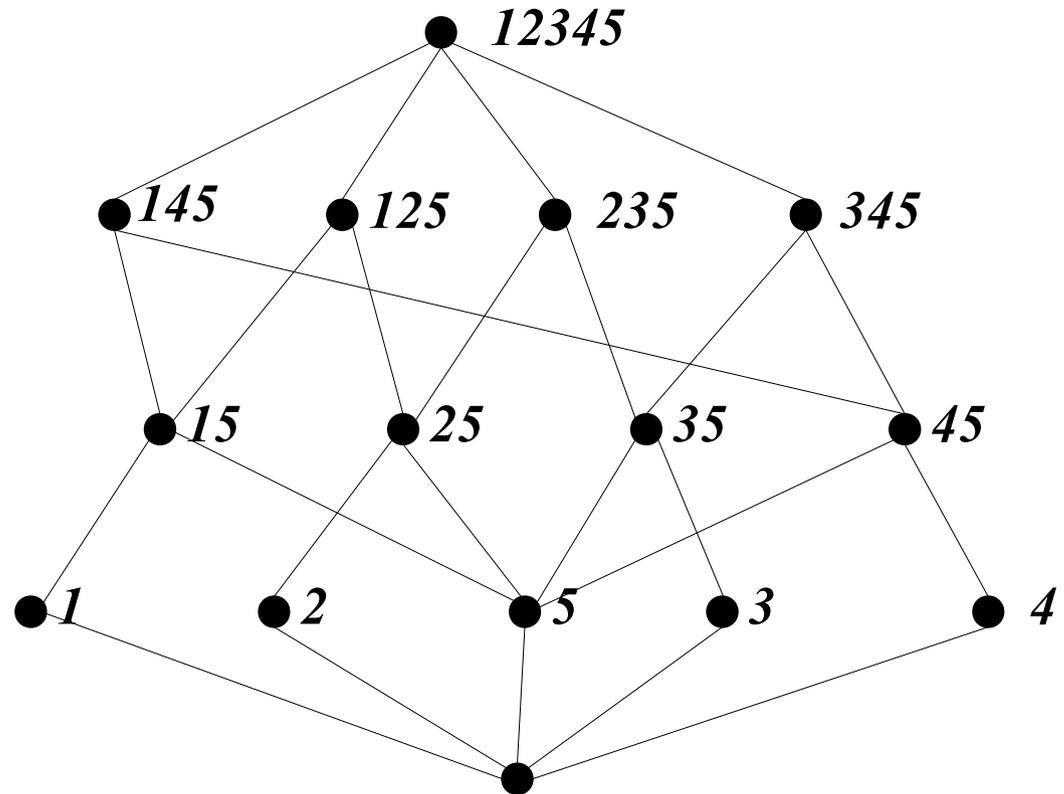
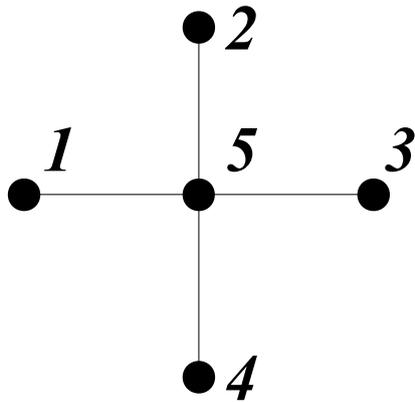
Apparition d'un cycle sur un ensemble de classes qui s'intersectent deux à deux.

# Systeme de classes Parcimonieux

Mais tous les hyper-arbres ne sont pas des systemes de classes parcimonieux

## Exemple

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$
$$E = \{ 145, 125, 235, 345 \}$$

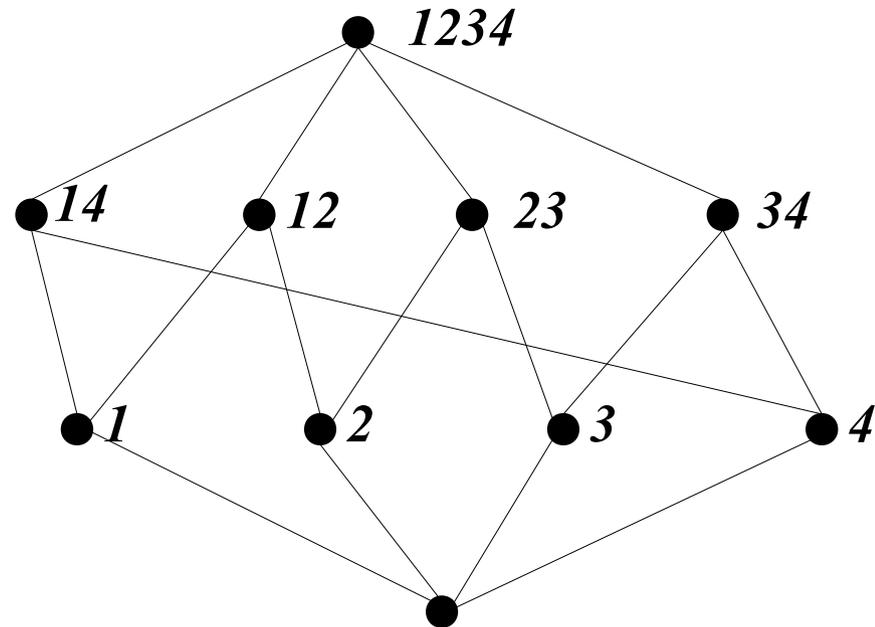
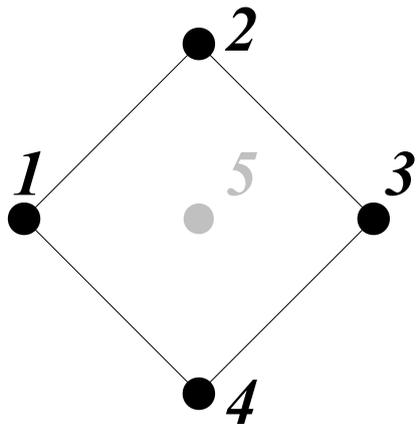


# Systeme de classes Parcimonieux

Mais tous les hyper-arbres ne sont pas des systemes de classes parcimonieux

## Exemple

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$
$$E = \{ 145, 125, 235, 345 \}$$



La restriction d'un hyper-arbre n'est pas forcement un hyper-arbre

# Systeme de classes Parcimonieux

Les systemes de classes parcimonieux

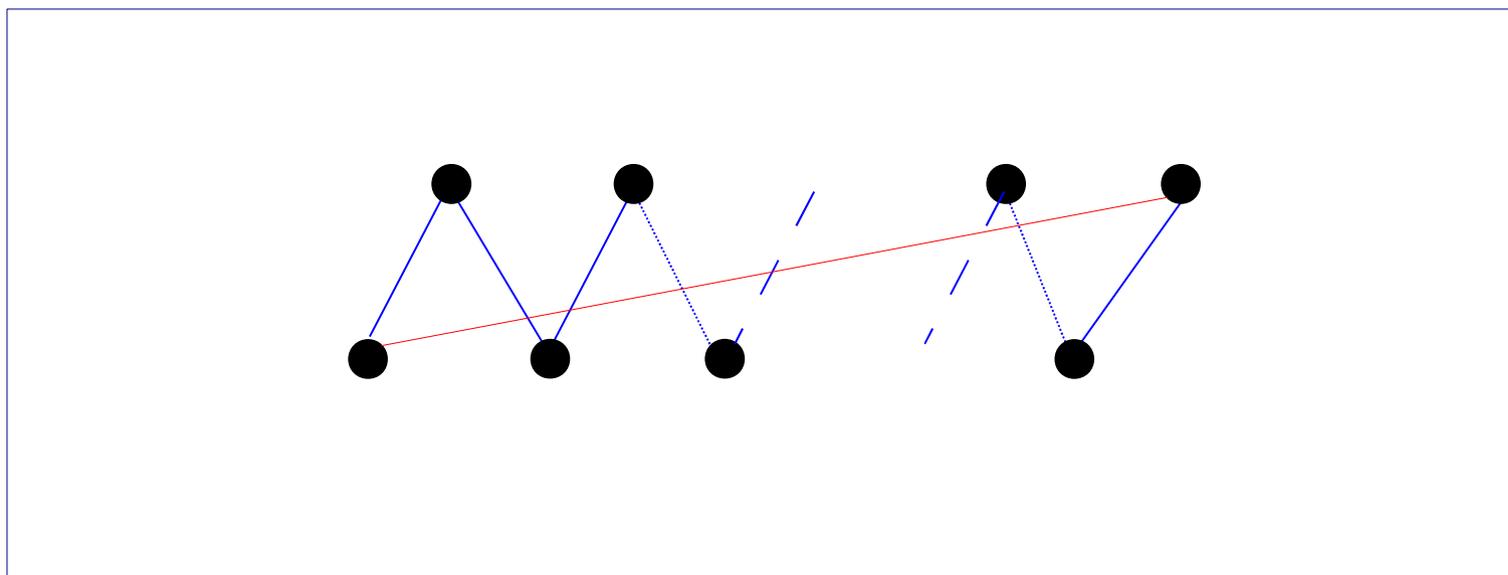
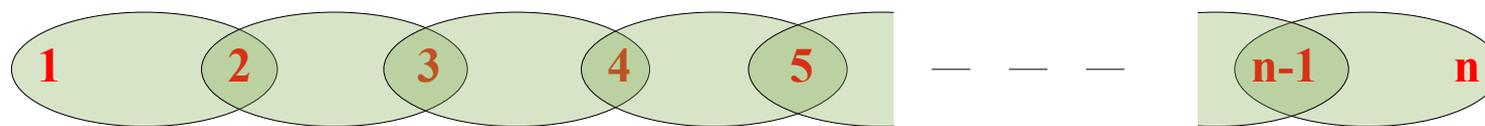
sont

Les hyper-arbres stables par restriction

Propriete utile en classification et phylogenie ;

On reste dans le modele en utilisant seulement un sous-ensemble des individus.

## 2) Systèmes de classes parcimonieux et classes de treillis

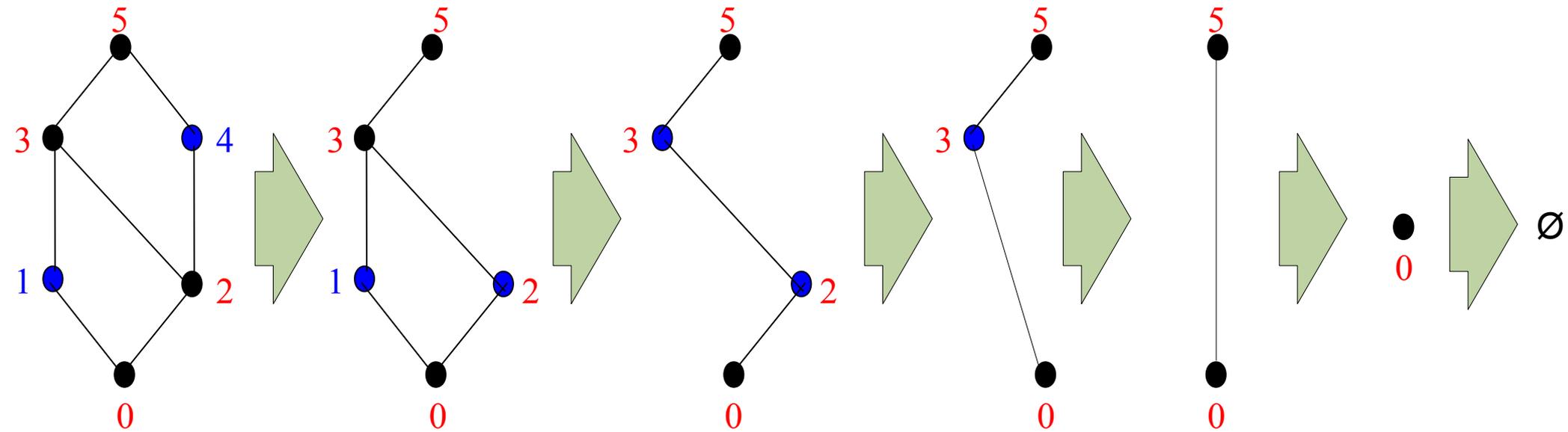


caractérisation des **treillis démantelables** par Rival et Kelly en 1974

**Caractérisation.** *Un treillis est démantelable ssi il ne possède pas de couronne comme sous-ordre.*

Les  **systèmes de classe parcimonieux**  sont en bijection avec la classe des  **treillis démantelables**  atomiques définie par Rival en 74.

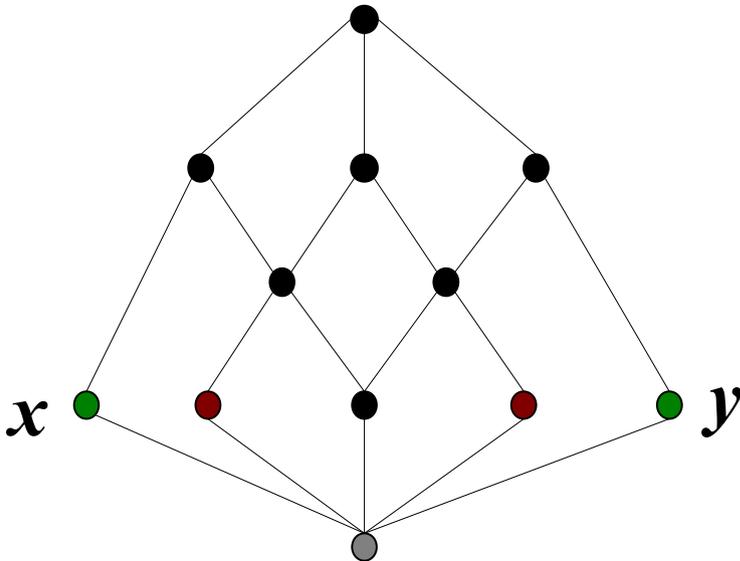
Un treillis est démantelable ssi  
 il existe une séquence de  $n$  sous-treillis de  $T$ ,  
 $\emptyset = S_0 \subset \dots \subset S_n = T$   
 Telle que  $|S_i| = |S_{i-1}| + 1$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$



## Théorème

Soit  $L$  un treillis démantelable, distinct d'une chaîne, alors il existe deux éléments  $x$  et  $y$  tels que

- $x \parallel y$
- $x, y \in D(L)$
- $\uparrow x$  est une chaîne
- $\uparrow y$  est une chaîne

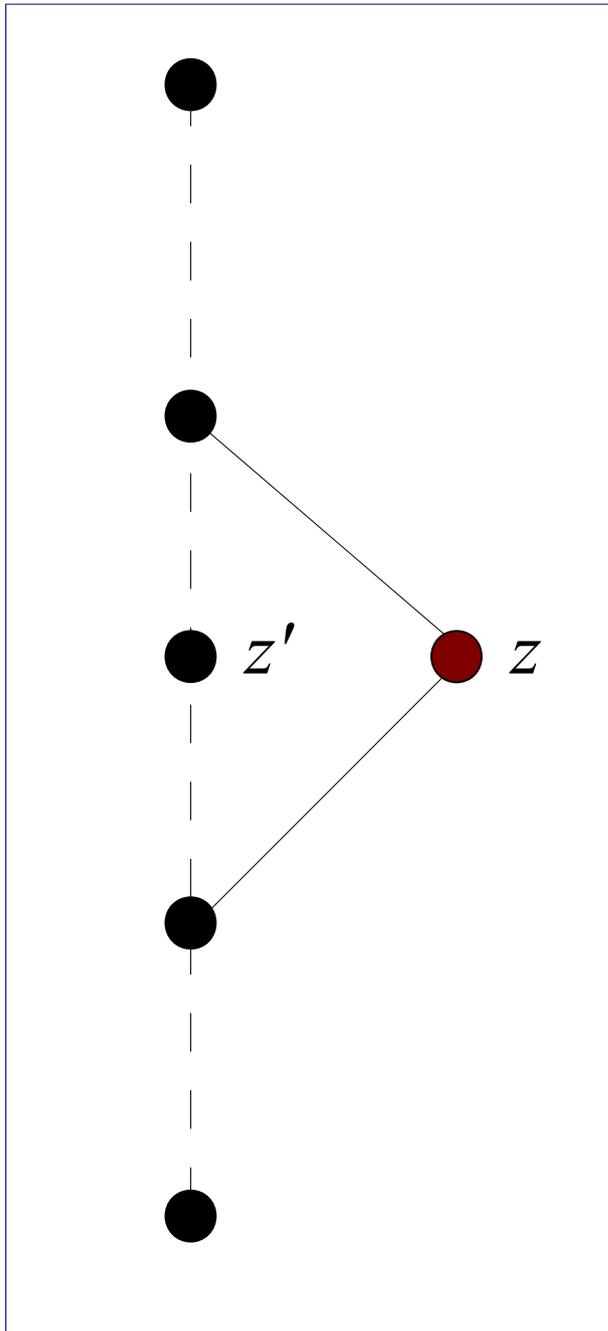


## Preuve

Par induction sur le nombre  $n$  d'éléments de  $L$

- Vrai pour  $n < 5$
- Supposons vrai  $L_n$ , treillis démantelable à  $n$  éléments
- Soit  $L_{n+1}$  un treillis démantelable à  $n+1$  éléments

# Preuve, cas 1 : $L_n$ est une chaîne



$$z \in L_{n+1} \text{ et } z' \notin L_n$$

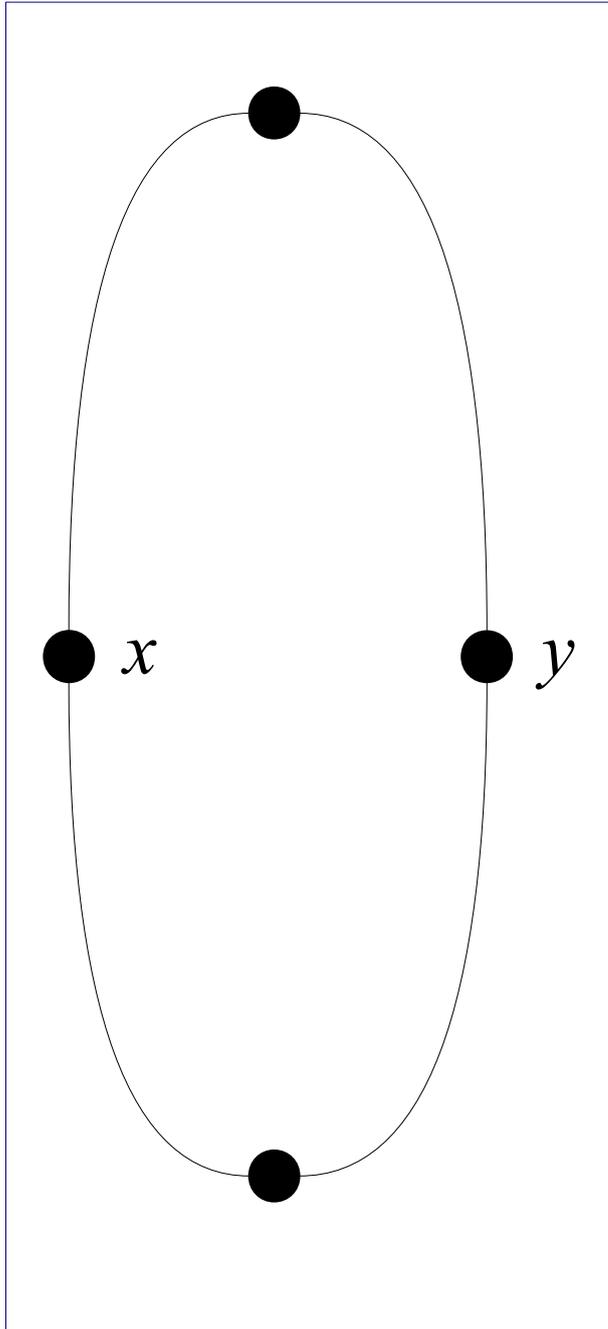
$z$  est incomparable  
à au moins un élément de  $L_n$

$\uparrow z$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$   
 $\uparrow z'$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$

$$z \in D(L_{n+1})$$

$$z' \in D(L_{n+1})$$

# Preuve, cas 2-3-4 : $L_n$ n'est pas une chaîne



$$z \in L_{n+1} \text{ et } z' \notin L_n$$

**Cas 2.**

$z$  est incomparable à  $x$  et  $y$

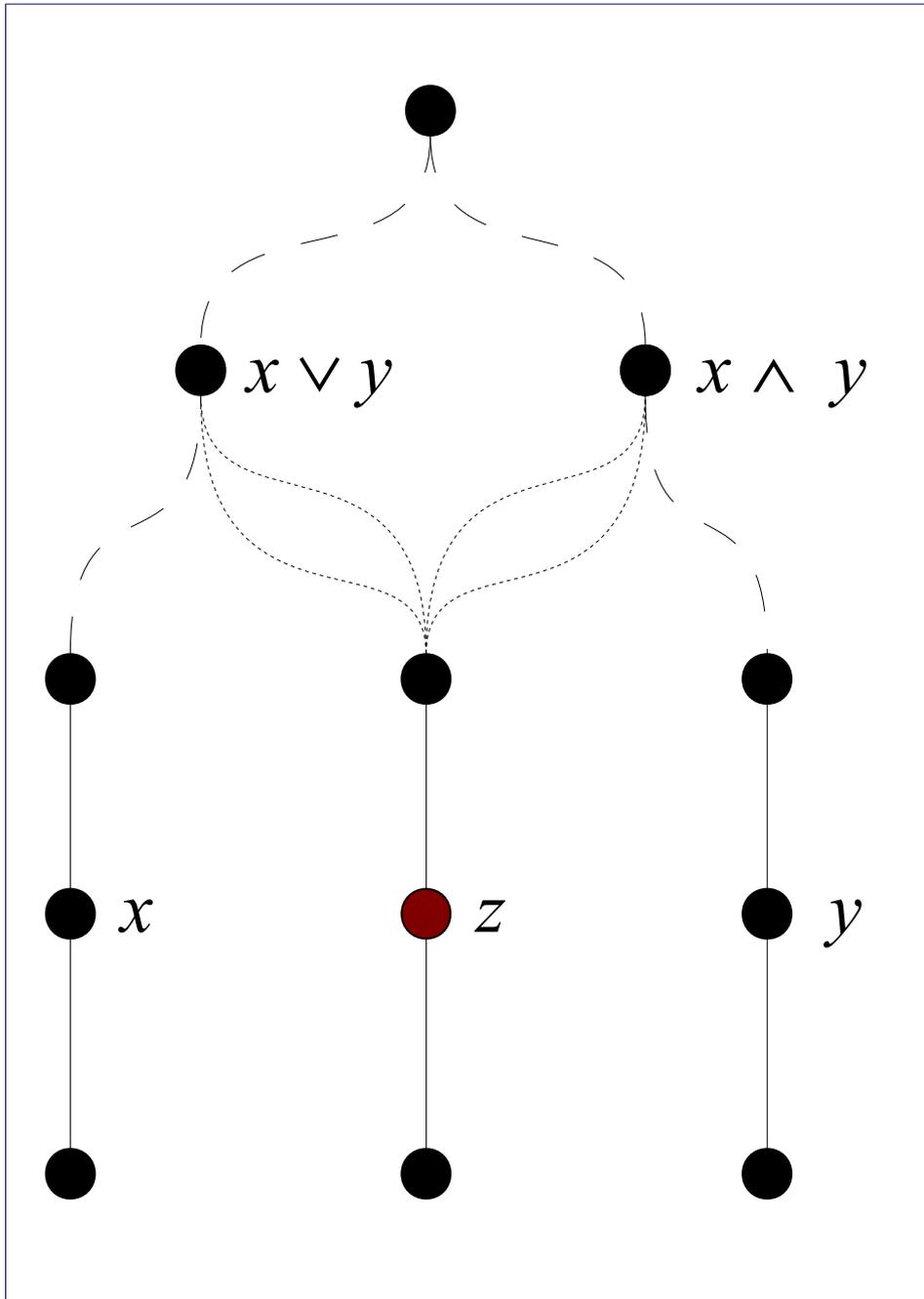
**Cas 3.**

$z$  est incomparable à  $x$  et comparable à  $y$

**Cas 4.**

$z$  est comparable à  $x$  et  $y$

# Preuve, cas 2 : $x \parallel y \parallel z$



$$z \in L_{n+1} \text{ et } z' \notin L_n$$

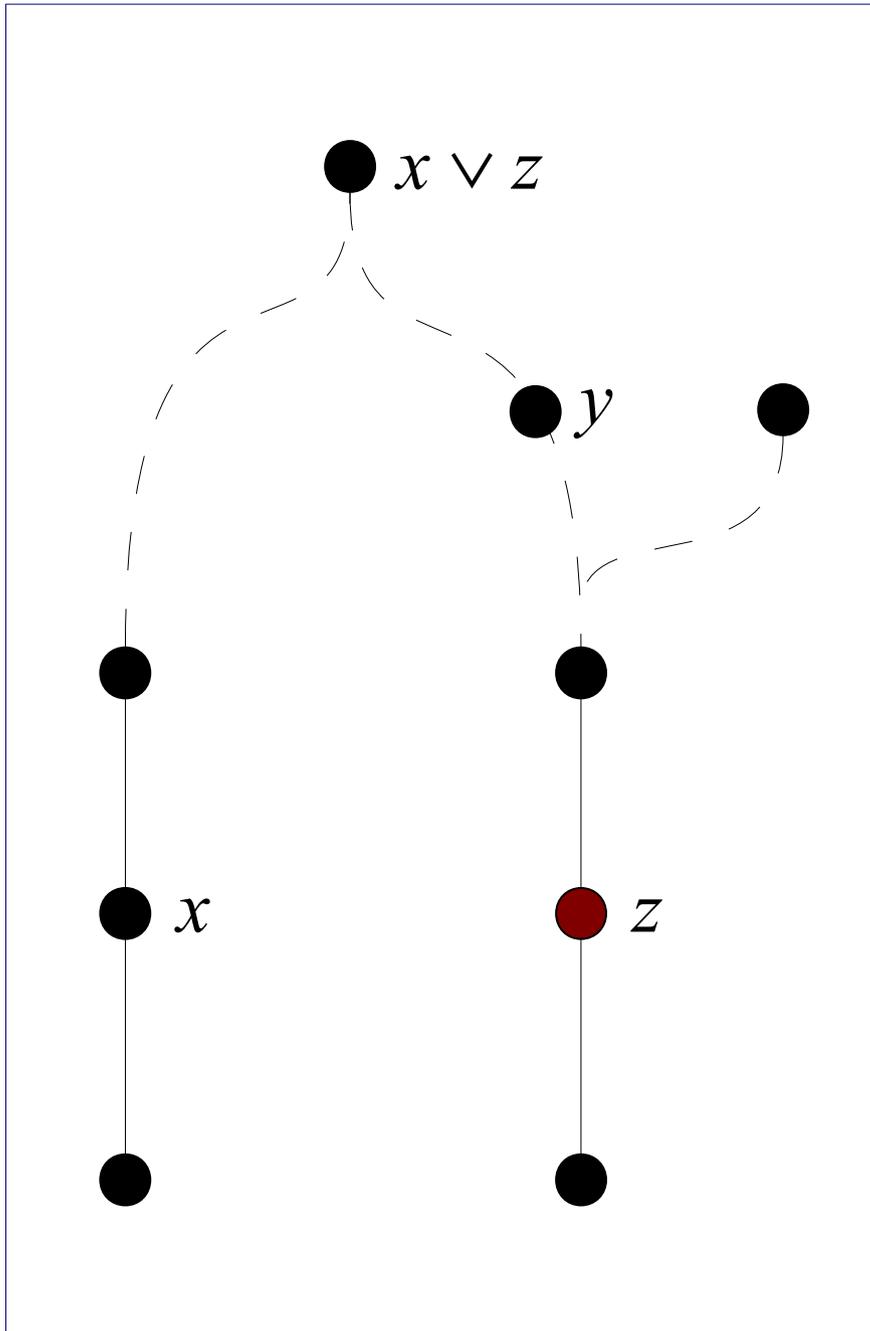
$z$  est incomparable à  $x$  et  $y$

$\uparrow x$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$   
 $\uparrow y$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$

$$x \in D(L_{n+1})$$

$$y \in D(L_{n+1})$$

# Preuve, cas 3(1) : $z < y$ et $z \parallel x$



$$z \in L_{n+1} \text{ et } z' \notin L_n$$

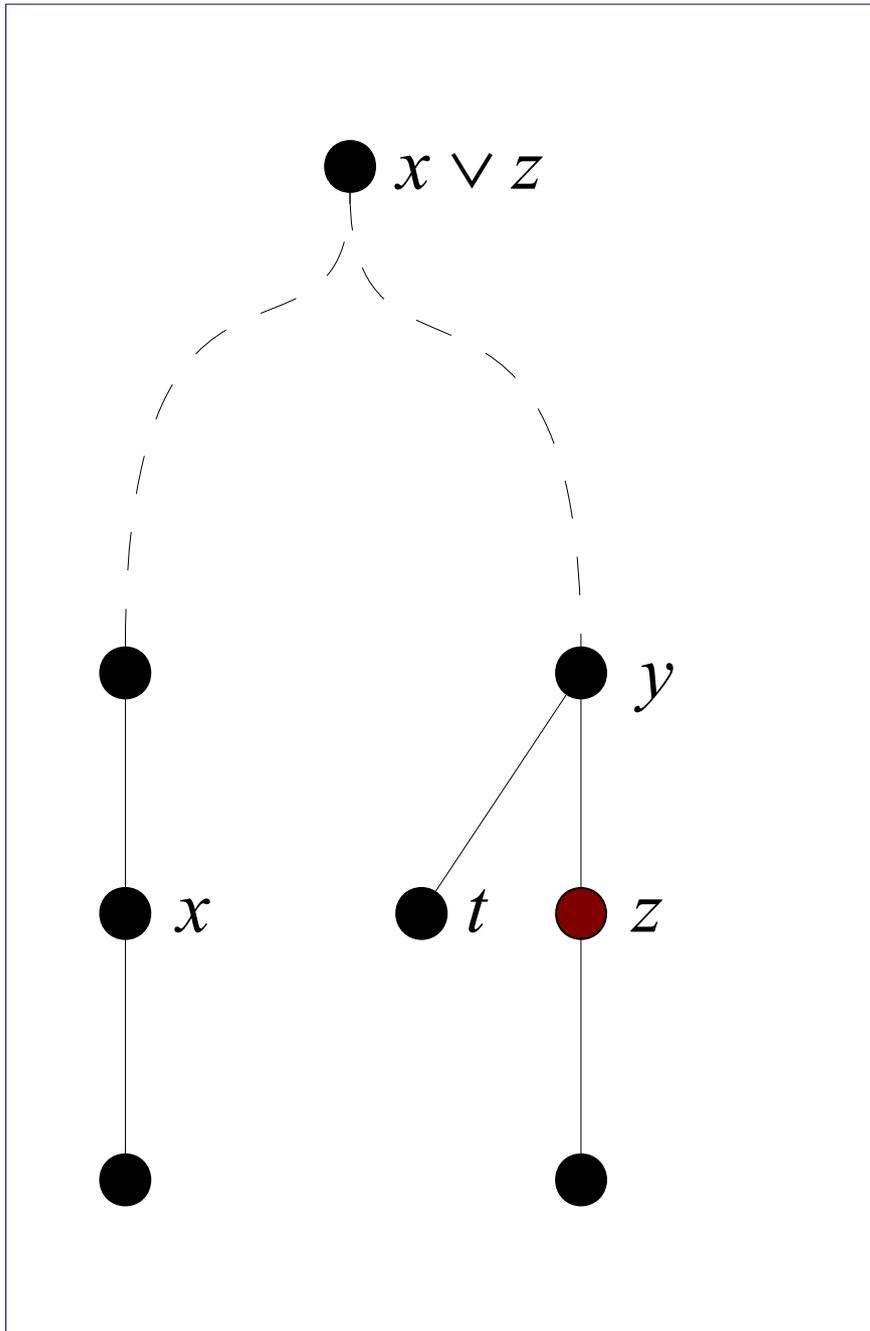
$y$  ne couvre pas  $z$

$\uparrow x$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$   
 $\uparrow y$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$

$$x \in D(L_{n+1})$$

$$y \in D(L_{n+1})$$

# Preuve, cas 3(2) : $z < y$ et $z \parallel x$



$$z \in L_{n+1} \text{ et } z' \notin L_n$$

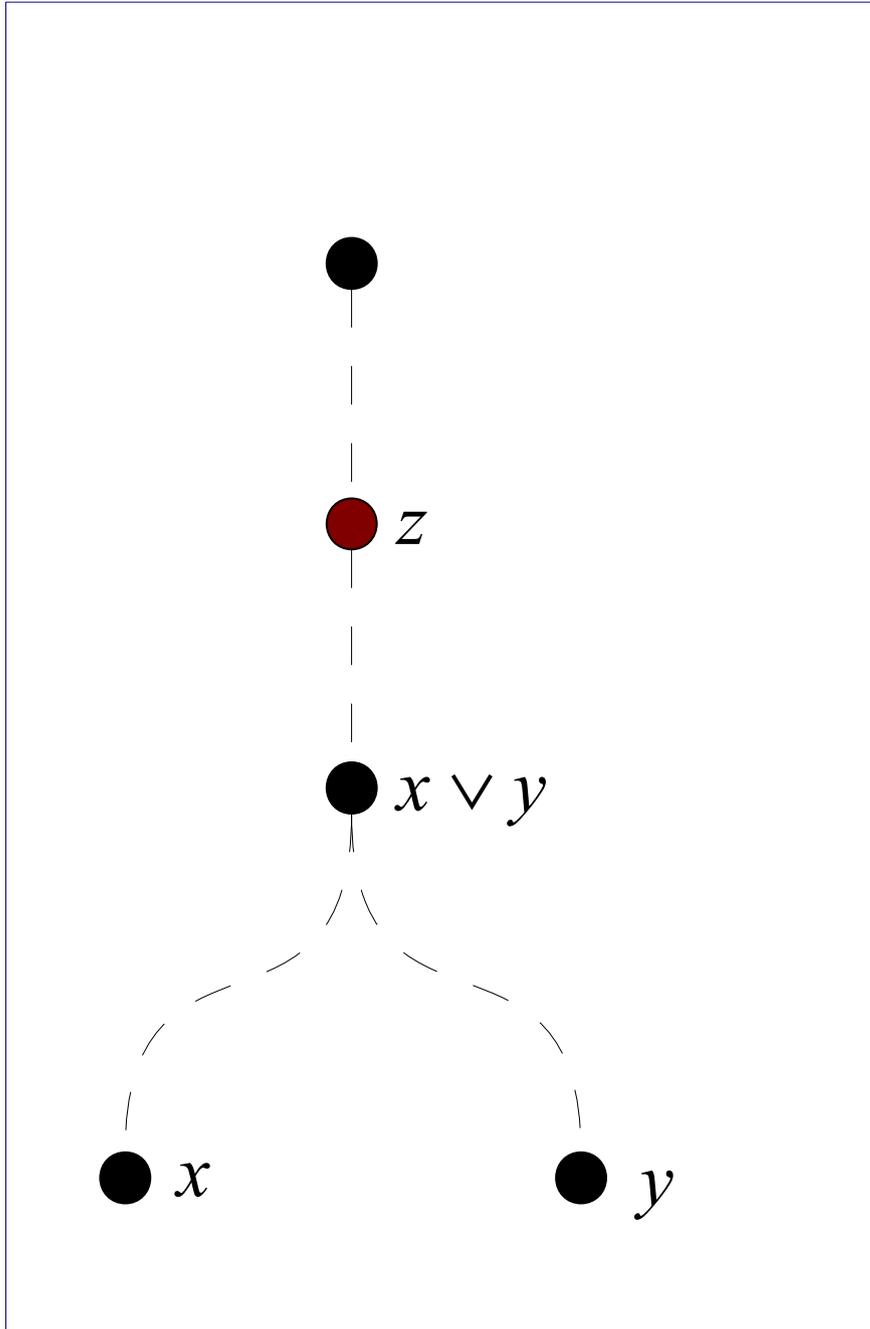
$y$  couvre  $z$

$\uparrow x$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$   
 $\uparrow z$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$

$$x \in D(L_{n+1})$$

$$z \in D(L_{n+1})$$

# Preuve, cas 4(1) : $z > x \vee y$



$$z \in L_{n+1} \text{ et } z' \notin L_n$$

$x \vee y$  est une chaine de  $D(L_{n+1})$

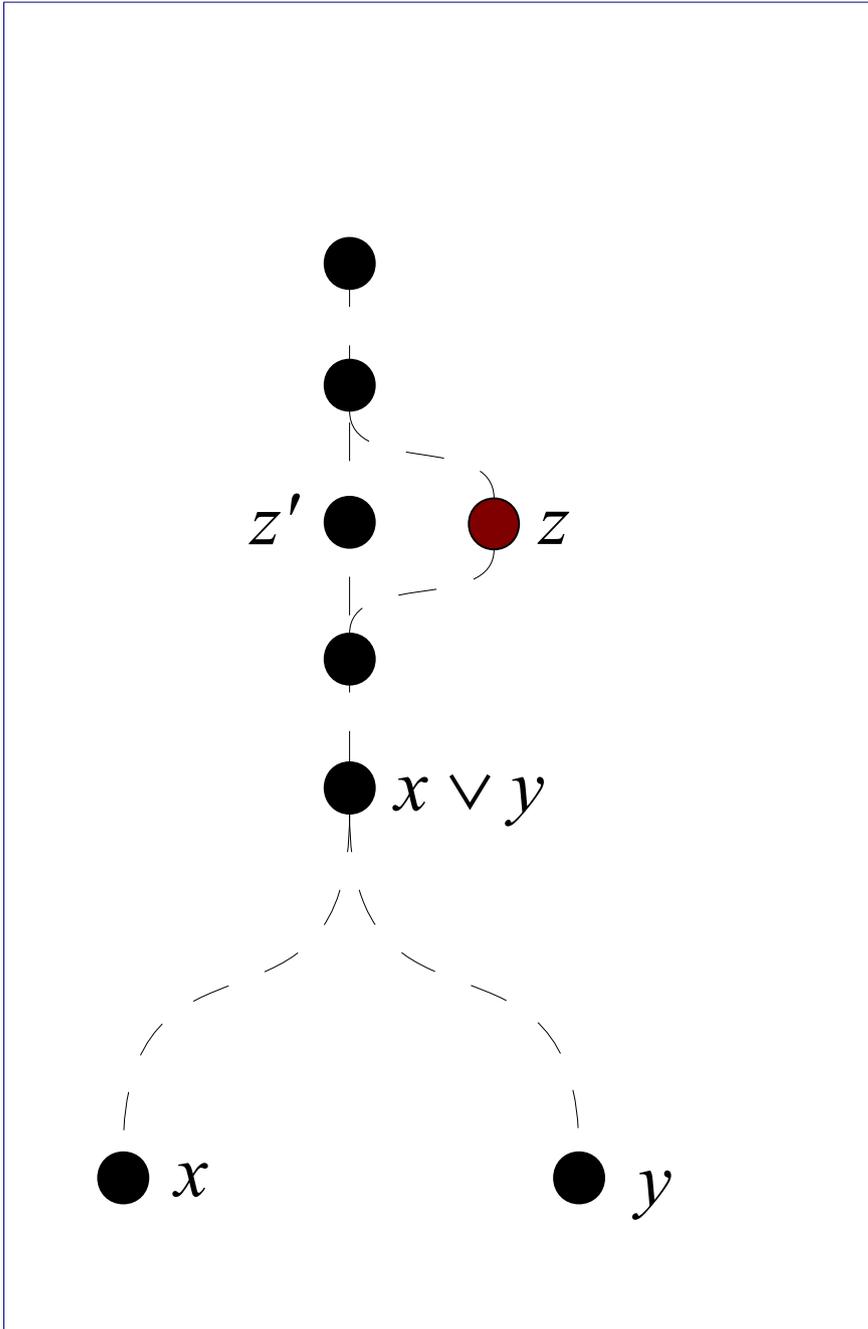
$\uparrow x$  est une chaine de  $D(L_{n+1})$

$\uparrow y$  est une chaine de  $D(L_{n+1})$

$$x \in D(L_{n+1})$$

$$y \in D(L_{n+1})$$

# Preuve, cas 4(2) : $z > x \vee y$



$z \in L_{n+1}$  et  $z' \notin L_n$

$x \vee y$  n'est pas une chaîne de  $D(L_{n+1})$

$\uparrow z$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$   
 $\uparrow z'$  est une chaîne de  $D(L_{n+1})$

$z \in D(L_{n+1})$   
 $z' \in D(L_{n+1})$

## Théorème

Soit  $L$  un treillis démantelable, distinct d'une chaîne, alors il existe deux éléments  $x$  et  $y$  tels que

- $x \parallel y$
- $x, y \in D(L)$
- $\uparrow x$  est une chaîne
- $\uparrow y$  est une chaîne

*Très similaire, dans sa formulation, au...*

## Théorème (Dirac, 1961)

Soit  $G=(V,E)$  un *graphe triangulé*, distinct d'une clique, alors il existe deux sommets  $x$  et  $y$  de  $V$  tels que

- $x$  n'est pas adjacent à  $y$
- $x, y$  sont simpliciaux

## Rappel

Les systèmes de classes parcimonieux  
sont  
Les hyper-arbres stables par restriction

*A mettre en relation avec la ...*

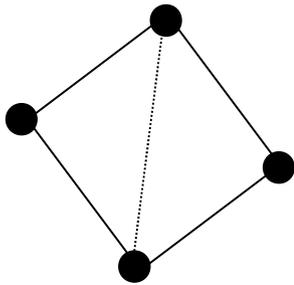
## Caractérisation des hyper-arbres (Duchet, 1978)

Un hypergraphe  $H = (X, E)$  est un hyper-arbre  
ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :

Le graphe d'intersection de  $H$  est *triangulé*

La propriété de Helly est vérifiée pour  $H$

### 3) Systèmes de classes parcimonieux et classes de graphes



*Graphes triangulés (cordés)*

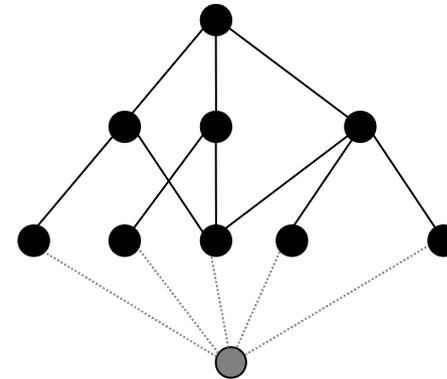
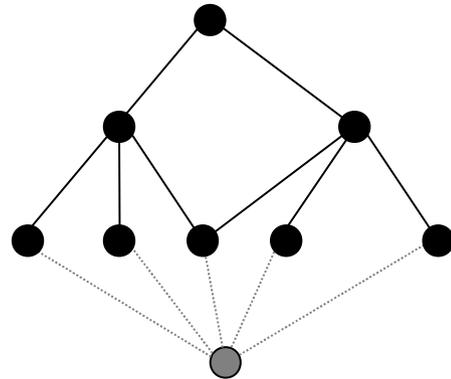
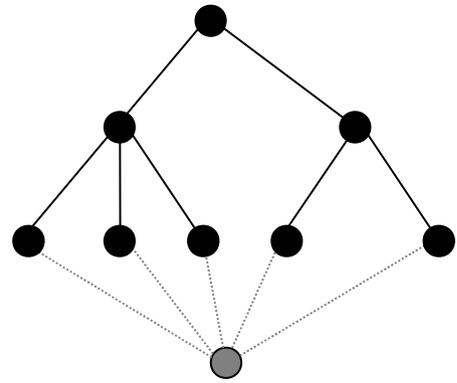
$G=(V,E)$  est un **graphe triangulé** ssi tout cycle de sommets de longueur supérieure à 3 est cordé.

**un sommet simplicial** est un sommet dont le voisinage est une clique.

**Caractérisation.** Un graphe est triangulé ssi il existe un schéma d'élimination simplicial, c'est à dire une suite de graphes déduits des précédents par le retrait d'un élément simplicial, aboutissant à un graphe vide.

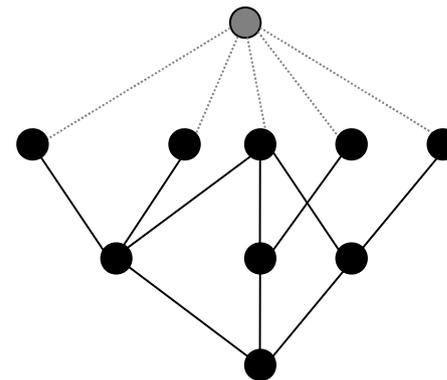
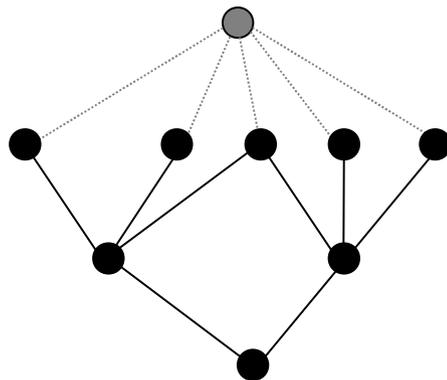
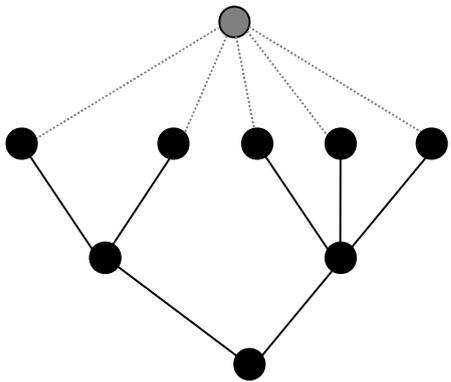
*À la lecture des différents résultats, on présuppose des liens forts entre les graphes triangulés et les treillis démantelables...*

# Comment étudier les liens entre graphes triangulés & treillis démantelables ?



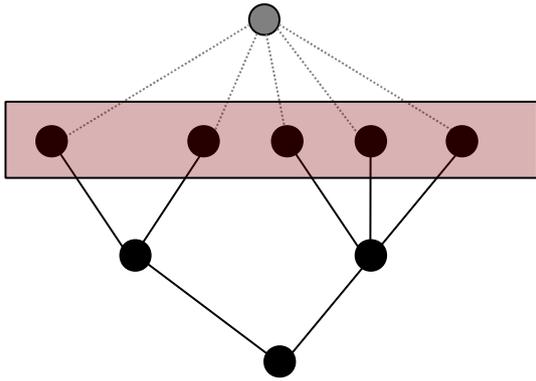
**Systemes de classes.** Systemes de fermeture, *atomiques*, obtenus à partir d'une famille de graphes seuils.

Passage au dual



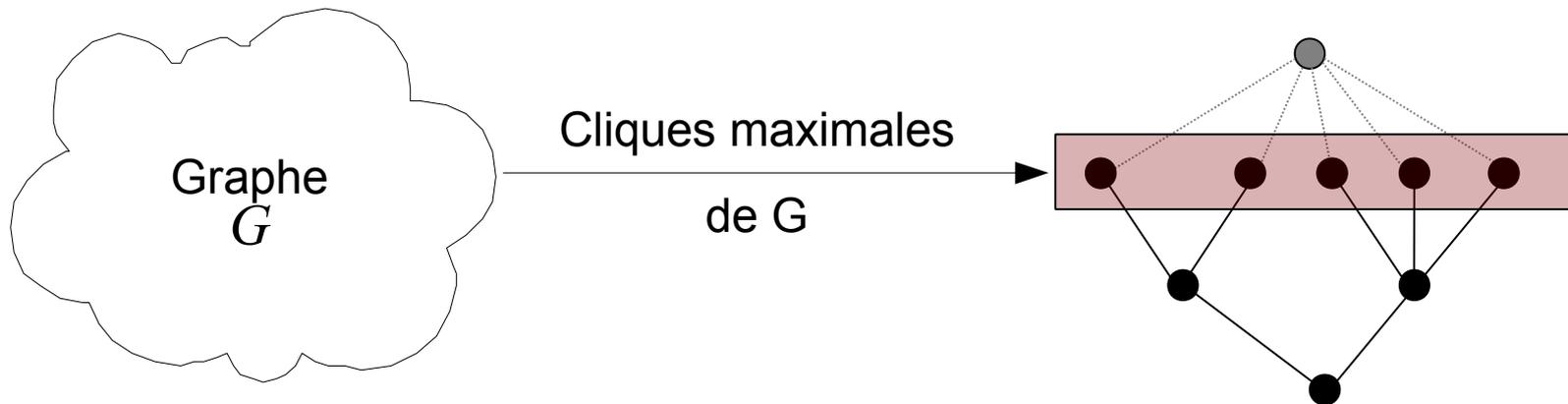
Systemes de fermetures duaux, *co-atomiques*, obtenus à partir de...

# treillis des cliques maximales d'un graphe

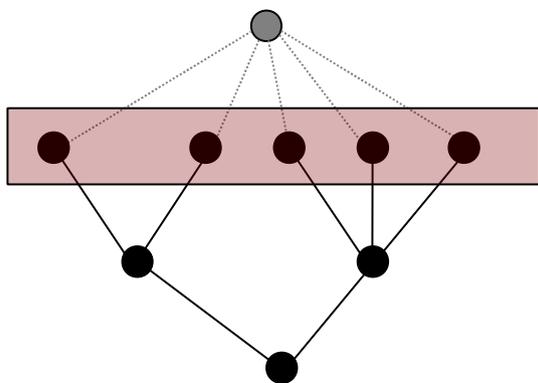


**Idée.** considérer que les co-atomes sont les cliques maximales d'un graphe.

Soit  $G(V, E)$  un graphe, on appelle **treillis des cliques maximales de  $G$** , le système de fermeture obtenu par intersection des cliques maximales de  $G$ , union  $V$ .



- La famille des cliques maximales d'un graphe définit toujours un treillis co-atomique
- Un treillis co-atomique ne provient pas forcément d'une famille de cliques maximales d'un graphe.

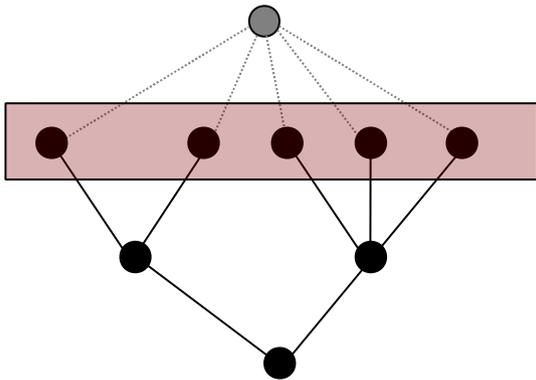


### Propriété de Gilmore (1962)

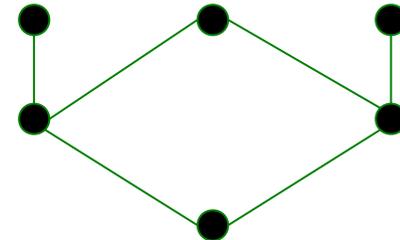
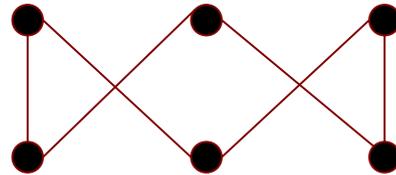
Un recouvrement  $K$  de  $V$  est exactement l'ensemble des cliques maximales d'un graphe  $G = (V, E)$  ssi pour tout  $A, B, C \in K$  :

si  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$  est non vide, alors il existe un élément de  $K$  l'incluant

# treillis des cliques maximales d'un graphe



Les quasi-hierarchies vérifient la propriété de Gilmore, de part l'absence de couronne à 3 éléments.

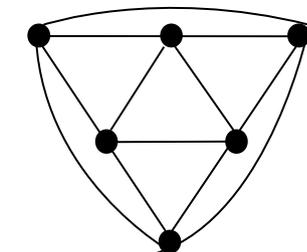
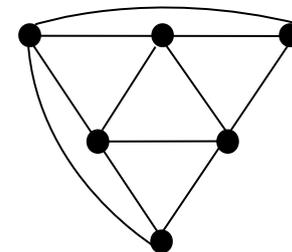
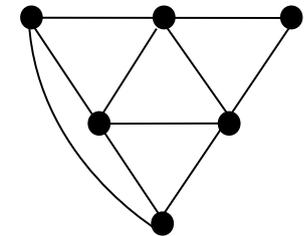
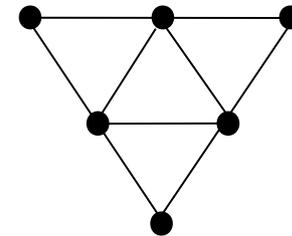


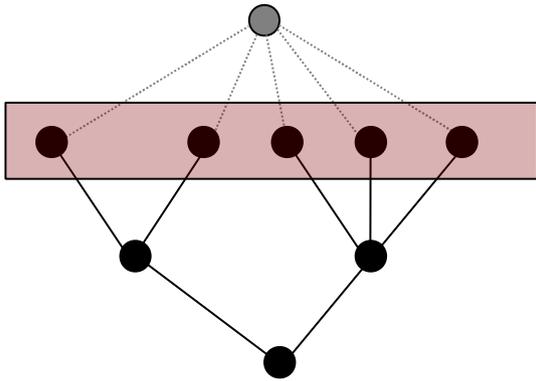
les **quasi-hiérarchies**

sont en bijection

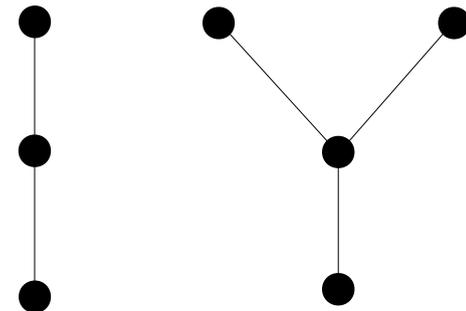
avec les **treillis des cliques maximales**

d'un graphe ne possédant aucune des quatre graphes ci-contre comme sous graphe induit

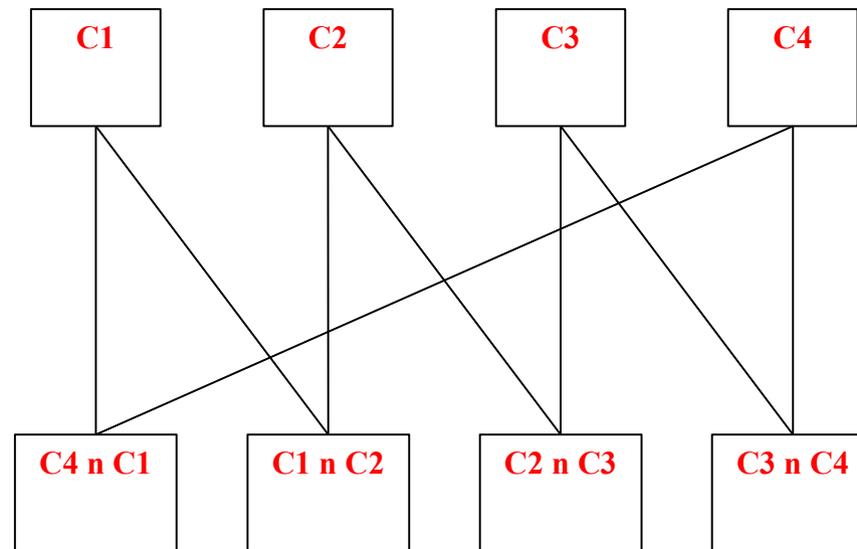
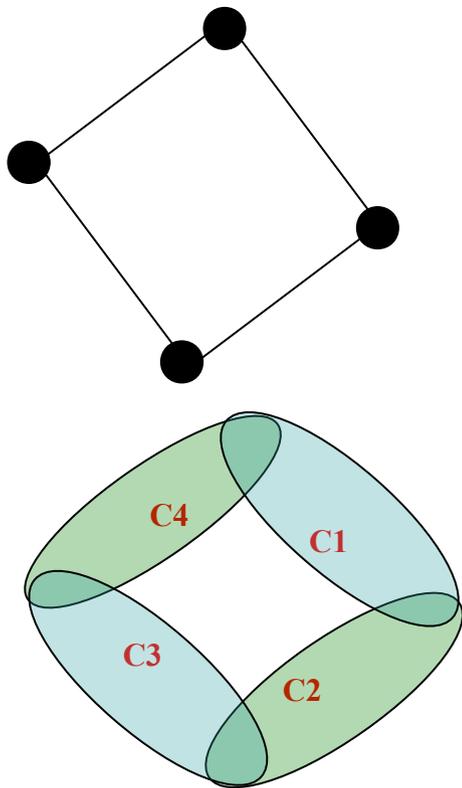




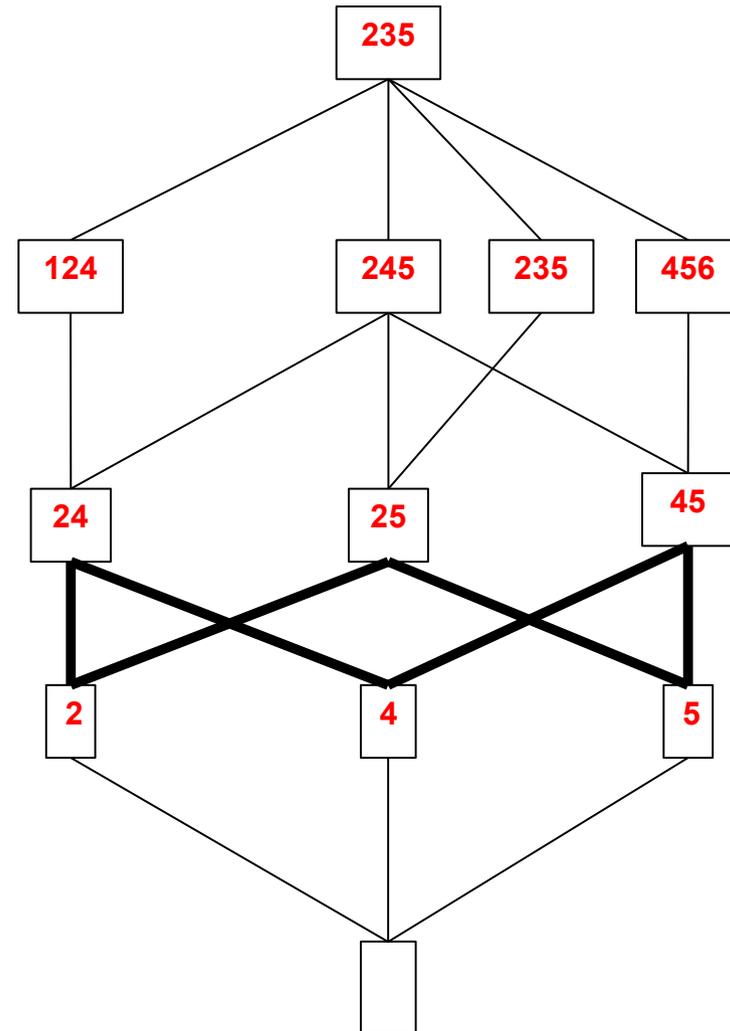
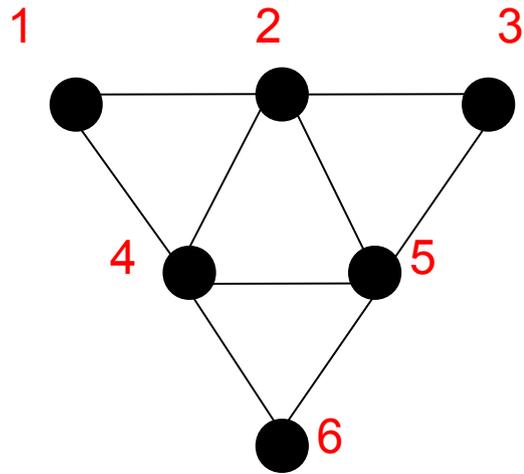
Quelle famille de graphes permet d'obtenir les systèmes de classes parcimonieux ?



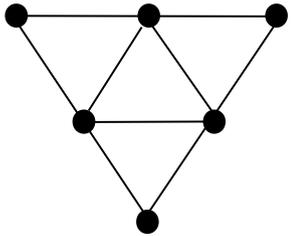
$G=(V,E)$  **graphe triangulé**  
est une **condition nécessaire** à l'obtention d'un  
treillis des cliques maximales démantelable.



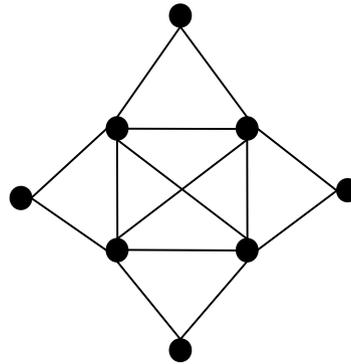
$G=(V,E)$  **graphe cordé** n'est **pas** une **condition suffisante** à l'obtention d'un treillis des cliques maximales **démantelable**.



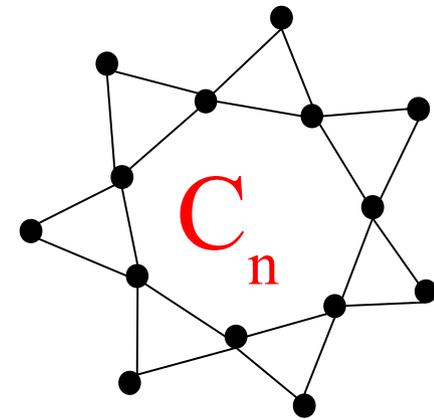
## graphes sans soleils



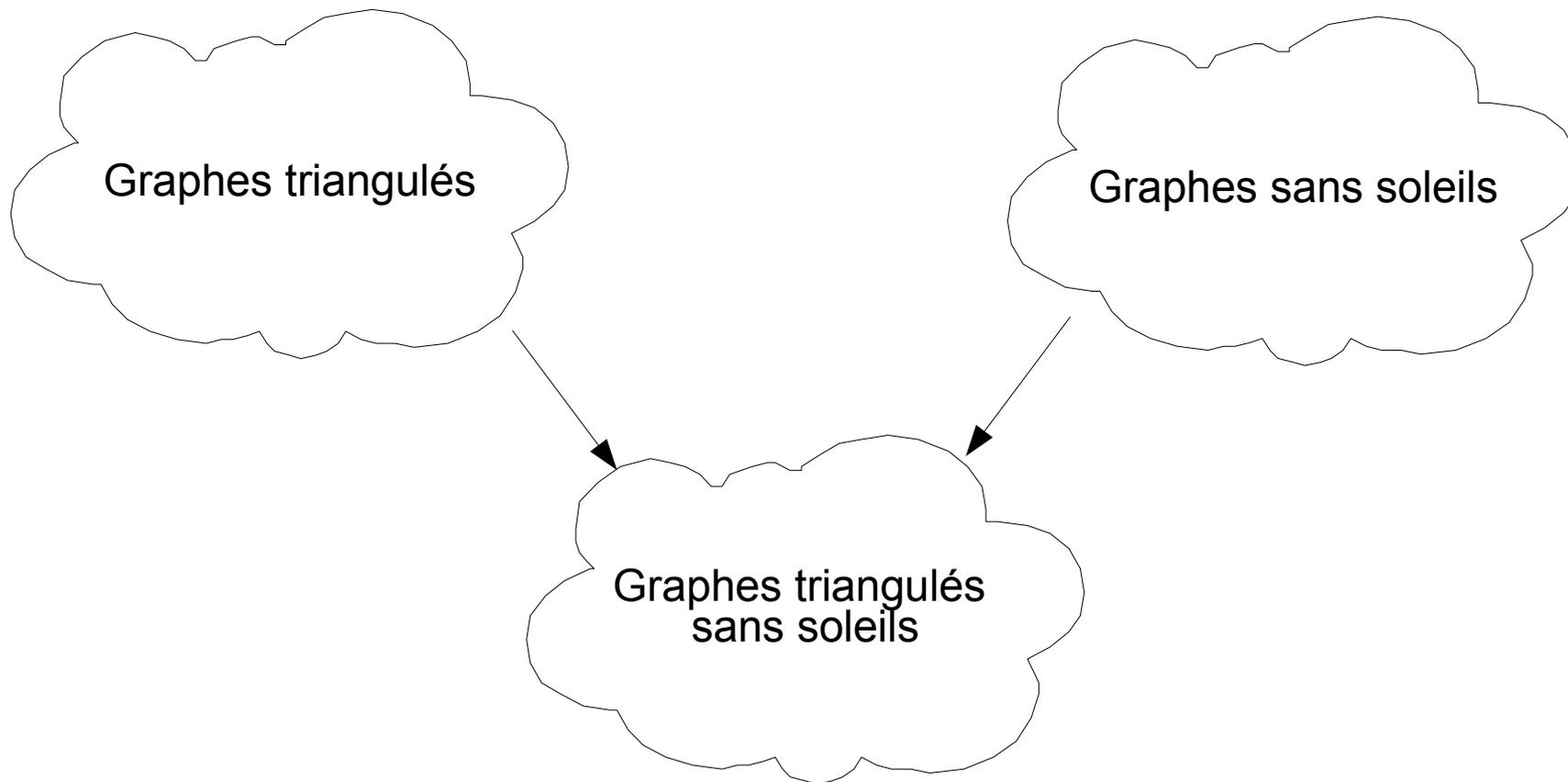
3-soleil



4-soleil



n-soleil

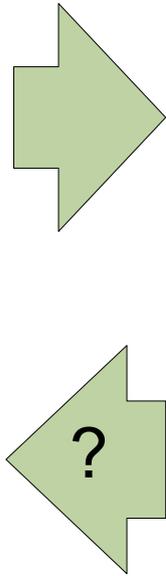


$G=(V,E)$  **graphe fortement cordé** (strongly chordal)  
ssi  $G$  est **cordé** et **sans soleils induits**.

$G=(V,E)$  **graphe fortement cordé** est caractérisé par

- l'existence d'un schéma d'**élimination fortement simplicial**
- l'existence d'un schéma d'**élimination simple**.

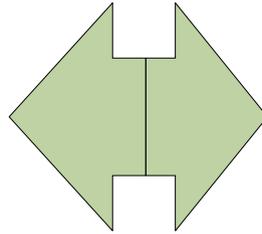
systeme de  
classes  
parcimonieux



graphe  
fortement  
cordé.

Le treillis des cliques maximales d'un graphe  
fortement triangulé  
est-il un système de classes parcimonieux ?

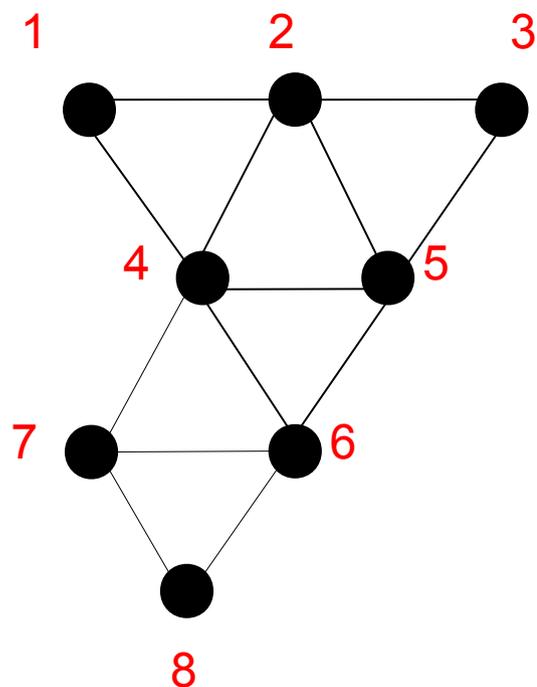
ystème de  
classes  
parcimonieux



graphe  
fortement  
cordé.

Oui, les systèmes de classes parcimonieux sont équivalents au treillis des cliques maximales d'un graphe fortement triangulé.

*Pour le montrer, on utilise la caractérisation des graphes fortement triangulés de Farber (1983) utilisant les sommets simples.*



Sommet simplicial :  $1, 3, 8$

- clique pour voisinage

Sommet simple :  $8$

- le voisinage du voisinage forme un ordre total

### Caractérisation (Farber 83).

Un graphe est fortement triangulé ssi tout sous-graphe induit possède un sommet simple.

$$N[2] = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$N[4] = \{ 1, 2, 5, 6, 7 \}$$

$$N[5] = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$N[6] = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$N[7] = \{ 4, 6, 7, 8 \}$$

Mq. le treillis des cliques maximales d'un graphe fortement triangulé est un treillis démantelable.

## Preuve.

Par induction sur le nombre de sommets du graphe.

- Vrai pour un graphe fortement triangulé de  $n$  sommets,  $n < 6$ .
- Supposons la propriété vérifiée pour les graphes fortement triangulés de  $n$  sommets
- Soit  $G_{n+1}$  un graphe fortement triangulé de  $n+1$  sommets.

$G_{n+1}$  est un graphe fortement triangulé de  $n+1$  sommets.

Soit  $G_n = G_{n+1} \setminus \{s\}$  avec  $s$  un sommet simple.

$\mathcal{F}$ , le treillis des cliques maximales de  $G_n$  est démantelable.

Pour  $G_{n+1}$  plusieurs cas peuvent se produire

**Cas 1.**  $N(s)$  est une clique maximale de  $G_n$ .

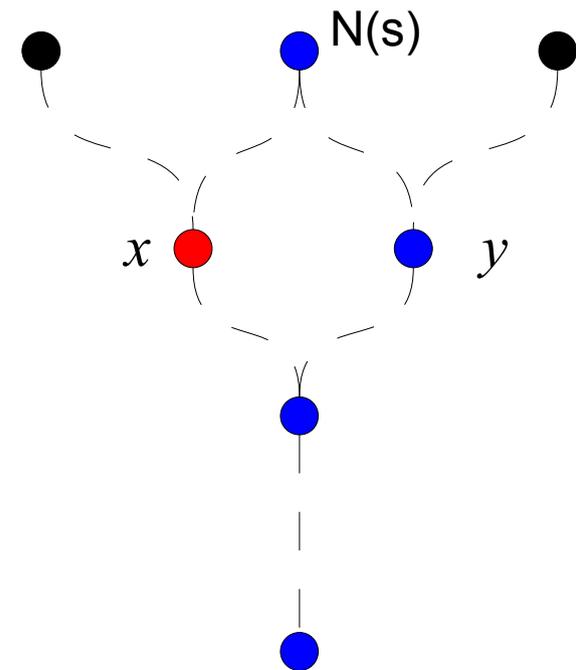
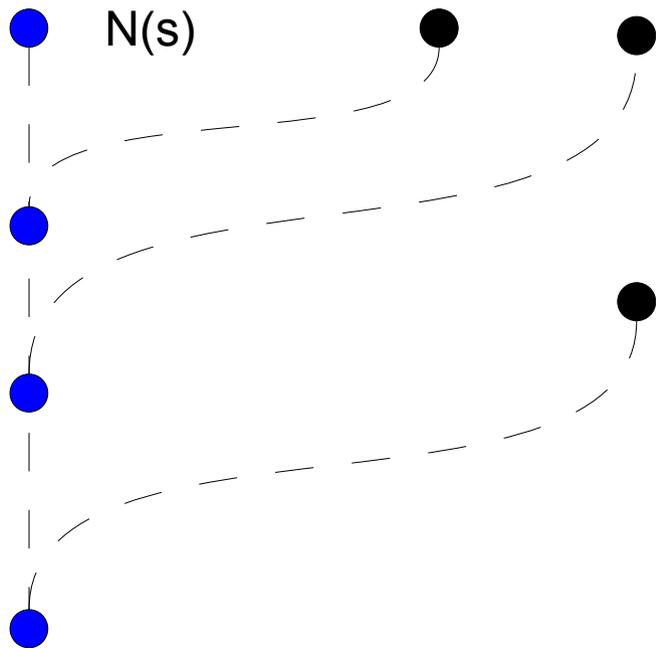
Dans ce cas, la structure du treillis ne change pas. Seule l'étiquette du sommet est modifiée.

**Cas 2.**  $N(s)$  est une clique de  $G_n$  et  $N(S) \in \mathcal{F}$

- Le treillis a un seul nouvel élément ; la nouvelle clique maximale.
- Le voisinage du voisinage étant ordonné, elle a un seul prédécesseur
- C'est un élément doublement irréductible
- Le treillis des cliques maximales de  $G_{n+1}$  est démantelable.

**Cas 3.**  $N(s)$  est une clique de  $G_n$  et  $N(S) \notin \mathcal{F}$

- Le treillis a un nouveau co-atome
- Il existe plusieurs nouvelles intersections avec  $N(S)$
- L'ensemble de ces intersections forment une chaîne.
- Le treillis des cliques maximales de  $G_{n+1}$  est démantelable.



Impossible car  $s$  est un sommet simple

**CQFD**

# Conclusions & Perspectives

## Résultats structurels & bonnes propriétés.

- Les systèmes de classes parcimonieux sont les hyper-arbres stables par restrictions.
- Les hyper-arbres stables par restrictions sont en bijection avec les treillis démantelables.
- Bonne propriétés pour la classification (on peut faire une classification identique sur une sous partie des espèces)
- Informations sur les interactions entre classes contenues dans l'ordre d'élimination (effeuillage)
- Les treillis démantelables co-atomiques sont en bijection avec les treillis des cliques maximales d'un graphe fortement cordé  $G$ .
- Une feuille, telle que définie dans les systèmes de classes parcimonieux, est un sommet simple de  $G$ , tels que définis par Farber en 83

## Perspectives & axes de recherches.

- Transfert de connaissances graphes / treillis / classification
  - Visualisation du système de classes (treillis, arbre des cliques, ...)
  - caractérisation de graphes par leur treillis des cliques maximales.
- Plongements de données quelconques dans le modèle
  - propriétés du plongement
  - algorithmique efficace
- Applications sur données réelles

Merci

Questions ?